

تعیین ظرفیت سیستم‌های مخابراتی چند ورودی - چند خروجی با خطای یکنواخت کانال

محمد نوذری زرمهری^۱، کمال شاه‌طالبی^۲، مهدی ادیسی^۳

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی واحد نجف آباد، mnozary@yahoo.com

۲- عضو هیأت علمی گروه فناوری اطلاعات دانشگاه اصفهان، shahtalebi@eng.ui.ac.ir

۳- عضو هیأت علمی گروه فناوری اطلاعات دانشگاه اصفهان، edrisi@eng.ui.ac.ir

چکیده

امروزه استفاده از سیستم‌های چند ورودی - چند خروجی برای بالا بردن ظرفیت سیستم‌های مخابراتی راه‌کاری متداول شده است. افزایش ظرفیت این سیستم‌ها با داشتن اطلاعات کانال در فرستنده و با دریافت آن از گیرنده امکان‌پذیر می‌شود. در عمل، اطلاعات کانالی که در فرستنده فراهم می‌شود، به دلیل تخمین در گیرنده، کوانتیزاسیون و استفاده از فیدبک پاره‌ای برای ارسال اطلاعات به فرستنده، دارای خطا می‌باشد. از این رو بر خلاف روش‌های متداول قبلی که در آن‌ها معمولاً با فرض توزیع گوسی (ناشی از گوسی بودن مولفه‌های کانال) برای خطای کانال، ظرفیت محاسبه می‌شود، در این مقاله ضمن مرور نتایج بدست آمده‌ی قبلی در تعیین ظرفیت سیستم‌های چند ورودی - چند خروجی، با در نظر گرفتن توزیع یکنواخت برای خطای تخمین، به شیوه‌ای تحلیلی، ظرفیت سیستم را محاسبه و نتایج را بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی

MIMO، ظرفیت، فیدبک پاره‌ای، توزیع یکنواخت، Channel State Information، سیستم‌های بی‌سیم، کانال مخابراتی، ظرفیت کانال، خطای کانال، تخمین کانال

۱- مقدمه

در بررسی میزان ظرفیت سیستم در چنین شرایطی معمولاً برای خطای بین مقدار واقعی و تخمین ارسالی CSI، از توزیع گوسی استفاده می‌شود. در حالی که توزیع آماری یکنواخت انطباق بهتری با این خطا داشته و بنا بر این نتایج حاصل با در نظر گرفتن این توزیع از صحت و اعتبار بیشتری برخوردار است. این موضوع از آن جا ناشی می‌شود که مقدار واقعی برآورد شده توسط گیرنده از کانال که یک کمیت پیوسته است، ابتدا کوانتیزه شده و سپس با توجه به میزان دقت مورد نیاز، توسط چند بیت برای فرستنده ارسال می‌شود. واضح است که خطای بین مقدار واقعی و مقدار کوانتیزه‌ی

سیستم‌های چند آنتنی، نرخ بیت بالا را برای سیستم‌های بی‌سیم نسل آینده برآورده خواهند کرد. ظرفیت این سیستم‌ها هنگامی که اطلاعات کانال در هر دو طرف فرستنده و گیرنده در دسترس باشد، ماکزیمم می‌شود. اطلاعات کانال (CSI¹) در گیرنده و به‌وسیله ارسال رشته‌های آموزشی متوالی بدست‌آمده و سپس از طریق فیدبک به فرستنده ارسال می‌شود. اگر چه محدود بودن فیدبک و کوانتیزه کردن اطلاعات ارسالی، در کیفیت CSI ارسال شده به فرستنده تأثیر منفی دارد، ولی مطالعه روی وجود CSI جزئی در فرستنده نشان‌دهنده‌ی بهبود ظرفیت در حالت کلی می‌باشد.

۳- ظرفیت سیستم MIMO با داشتن اطلاعات کانال در فرستنده

در مواردی که فرستنده اطلاعات کانال را در اختیار داشته باشد، می‌توانیم روش‌های بهینه‌ای را در زمان تخصیص توان به هر یک از آنتن‌های فرستنده به کار ببریم. در این روش‌ها، به زیر کانالی که با کیفیت بهتری اطلاعات را منتقل می‌کند، توان بیشتری نیز اختصاص می‌یابد.

یک روش برای محاسبه تخصیص بهینه‌ی توان به $n = \min(N_T, N_R)$ زیر کانال، استفاده از الگوریتم واترپورینگ [۲] است. در این الگوریتم با دسته‌بندی زیر کانال‌ها به تدریج زیر کانال‌هایی که قادر به انتقال بهتر توان از محل فرستنده به گیرنده هستند شناسایی شده و توزیع توان فرستنده بر روی آن‌ها به نسبت بهره‌ی توان هر زیر کانال انجام می‌شود.

در چنین شرایطی با توجه به فرض وجود CSI در فرستنده، فرمول ظرفیت به صورت زیر بیان شده است:

$$C = \sum_{k=1}^n \log_2 \left(1 + \frac{\gamma_k \cdot P_k}{N_T} \varepsilon_k^2 \right) \quad (1)$$

در رابطه‌ی بالا P_k قدرت اختصاص داده شده به زیر کانال k ام و ε_k^2 گین قدرت و یا در حقیقت مقادیر ویژه ماتریس HH^H می‌باشند. آن چه از رابطه‌ی فوق در الگوریتم واترپورینگ اهمیت پیدا می‌کند، ضریب γ_k یعنی مقدار توان سمبل تعیین شده برای زیر کانال k است که از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\gamma_k = E \left\{ |s_k|^2 \right\} \quad (2)$$

هدف الگوریتم واترپورینگ پیدا کردن γ_k بهینه جهت ماکزیمم کردن ظرفیت داده شده در رابطه‌ی (۱) می‌باشد.

با توجه به رابطه‌ی (۱) مشاهده می‌شود که برای ماکزیمم کردن ظرفیت سیستم‌های MIMO، داشتن اطلاعات کانال در فرستنده یک پارامتر مهم بوده و با انتخاب درست γ_k می‌توان ظرفیت را ماکزیمم کرد.

در این جا می‌توانیم به بررسی ظرفیت در حالات خاص بپردازیم. کانال‌های SIMO³ و MISO⁴ موارد خاص کانال MIMO می‌باشند. برای کانال SIMO، $N_T = 1$ و $N_R = n$ می‌باشد. بنابراین وجود CSI در فرستنده هیچ تأثیری در ظرفیت کانال SIMO ندارد. در این حالت:

$$C_{SIMO} = \log_2(1 + p\varepsilon_1^2) \quad (3)$$

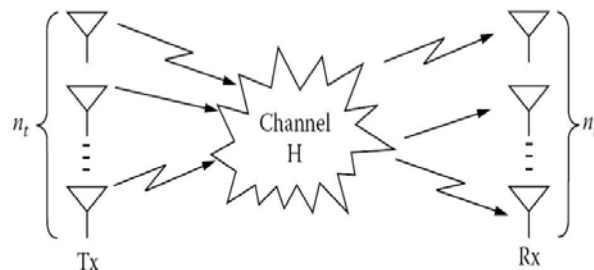
برای کانال MISO، $N_T = 1$ و $N_R = n$

ارسالی، دارای توزیع یکنواخت می‌باشد. هدف از ارائه‌ی این مقاله نیز بررسی ظرفیت سیستم با در نظر گرفتن رفتار آماری یکنواخت خطا می‌باشد.

به این ترتیب در بخش ۲ مدل سیستم MIMO و در بخش ۳ ظرفیت این سیستم‌ها در حالتی که فرستنده اطلاعات کانال را به صورت دقیق در اختیار دارد، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش ۴ به بیان نتایج موجود در مورد ظرفیت با در نظر گرفتن خطا در برآورد فرستنده از کانال و با در نظر داشتن توزیع گوسی برای آن، پرداخته شده است. در بخش ۵ نتایج حاصل از برآورد ظرفیت در حالتی که اطلاعات کانال در فرستنده دارای خطای یکنواخت باشد، ارائه شده و خصوصاً در وضعیتی که این خطا به صورت یکسان روی تمام زیر کانال‌ها توزیع شده، ارزیابی صورت می‌گیرد. نهایتاً در بخش ۶ نتایج حاصل از مقاله آورده شده است.

۲- مدل سیستم MIMO

شکل ۱ بلوک دیاگرام یک سیستم MIMO با آرایه‌ای N_T آنتن فرستنده و N_R آنتن گیرنده را نشان می‌دهد. سیگنال ارسالی در هر پریود سمبل با بردار ستونی x به طول N_T و کانال بی‌سیم بین فرستنده و گیرنده با ماتریس مختلط H به ابعاد $N_R \times N_T$ نشان داده می‌شود [۱].



شکل ۱- بلوک دیاگرام سیستم MIMO

h_{ij} ، المان واقع در سطر i و ستون j این ماتریس، ضریب فیدینگ کانال از i امین آنتن فرستنده به j امین آنتن گیرنده است. سیگنال دریافتی، $y = (HX + V)$ برداری ستونی به طول N_R است. نویز جمعی در گیرنده V نیز برداری ستونی به همین طول می‌باشد. در عملکرد عادی گیرنده با دریافت سیگنال y تلاش می‌کند تخمین مناسبی از سیگنال ارسالی x داشته باشد. علاوه بر آن، گیرنده با داشتن برآورد مناسبی از ماهیت سیگنال دریافتی می‌تواند تخمین قابل قبولی از کانال داشته و آن را به شکل ساده‌ای از مسیر فیدبک برای فرستنده ارسال کند.

در این روش کانال توسط گیرنده محاسبه شده و اطلاعات آن از طریق کانال مطمئن فیدبک، به فرستنده ارسال می‌شود. تخمین کانال، انجام کوانتیزاسیون و ارسال اطلاعات از مسیر فیدبک برای فرستنده عملاً موجب به‌وجود آمدن خطا بین CSI واقعی و CSI دریافت شده توسط فرستنده می‌شود. در بخش بعدی به مرور نتایج حاصل از گوسی فرض کردن این خطا، در محاسبه‌ی ظرفیت پرداخته‌ایم.

۴- بررسی ظرفیت سیستم‌های MIMO با خطای

کانال گوسی [۳]

از روابط ظرفیت کاملاً روشن است که ظرفیت به خصوصیات آماری کانال و بالطبع خطای کانال وابسته است. معمولاً خطای کانال گوسی و با میانگین صفر و واریانس σ_e^2 در نظر گرفته می‌شود. در این حالت و در مرجع ۳ فرمول زیر برای حد بالای ظرفیت بدست آمده است:

$$C \leq \frac{1}{\ln 2} \ln \left\{ \det \left(I + \frac{1}{\sigma_e^2} R_x (\tilde{H}^H \tilde{H} + \sigma_e^2 I) \right) \right\} \quad (5)$$

که در رابطه‌ی بالا σ_e^2 واریانس نویز در گیرنده و σ_e^2 واریانس خطای کانال می‌باشد.

می‌باشد. بنابراین در این شرایط ظرفیت کانال MISO به‌صورت ارائه شده در رابطه‌ی زیر می‌باشد:

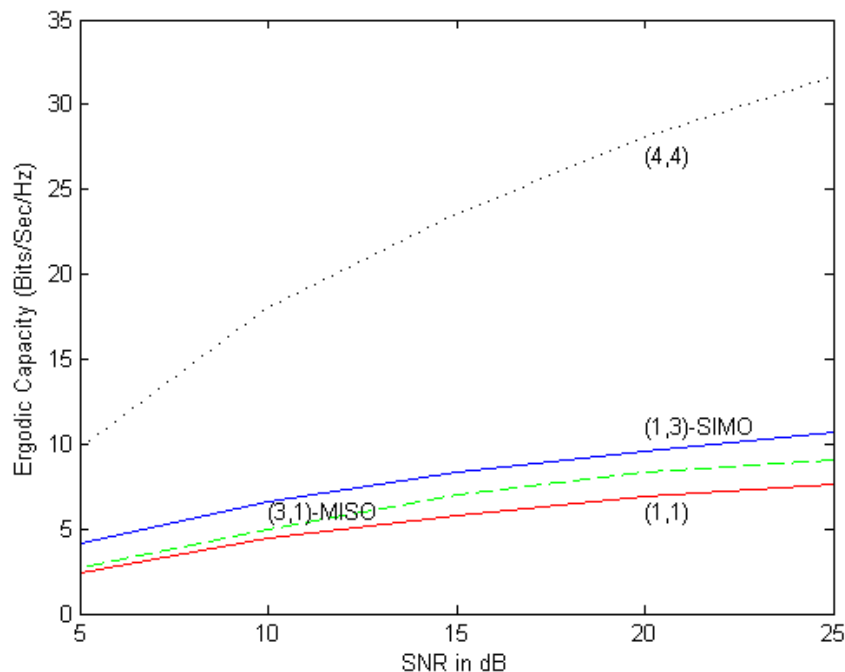
$$C_{MISO} = \log_2 \left(1 + \frac{P}{N_T} \varepsilon_1^2 \right) \quad (4)$$

با مقایسه‌ی دو رابطه‌ی (۳) و (۴) مشاهده می‌شود که $C_{SIMO} > C_{MISO}$ است.

شکل (۲) ظرفیت ارگادیک سیستم‌های SIMO, SISO, MIMO را در مدل کانال رایلی به‌صورت تابعی از SNR و برای تعداد آنتن فرستنده و گیرنده‌ی ارائه شده بر روی نمودار، نشان می‌دهد.

مشاهده می‌شود که ظرفیت با افزایش تعداد آنتن‌ها افزایش پیدا کرده و در شرایط مساوی، ظرفیت سیستم SIMO از ظرفیت سیستم MISO بیشتر است. این موضوع نشانگر تأثیر بیشتر استفاده از دایورسیتی در گیرنده بر روی ظرفیت است. به‌طور مثال در SNR=15 dB ظرفیت سیستم SIMO در حدود ۸ Bits/Sec/Hz و ظرفیت سیستم MISO در حدود ۴,۵ Bits/Sec/Hz و در مورد سیستم MIMO در حدود ۲۴ Bits/Sec/Hz می‌باشد.

در عمل CSI در فرستنده در دسترس نیست و همان‌طور که قبلاً اشاره شد، برای این‌که فرستنده به CSI دست پیدا کند، از روش ارسال اطلاعات کانال به‌وسیله فیدبک از گیرنده به فرستنده استفاده می‌شود.



شکل ۲- ظرفیت ارگادیک به‌صورت تابعی از SNR و تعداد آنتن

استفاده از فیدبک و ارسال اطلاعات کانال (که توسط گیرنده تخمین زده شده است) به فرستنده می‌تواند به ظرفیت بالایی دست یافت.

۵- بررسی ظرفیت سیستم‌های MIMO با خطای کانال یکنواخت

همان‌طور که در ابتدا عنوان کردیم، در نظر گرفتن توزیع یکنواخت برای خطای کانال، انطباق بهتری با سیستم‌هایی که از فیدبک پاره‌ای برای ارسال اطلاعات کانال به فرستنده استفاده می‌کنند، دارد. به همین دلیل و در رویکردی تازه، فرض می‌کنیم خطای کانال دارای توزیع یکنواخت باشد. اکنون هدف تعیین ظرفیت سیستم در چنین شرایطی می‌باشد.

برای این منظور از ارتباط بین میزان ظرفیت و ماتریس کانال که در مرجع [۴] آورده شده است، مطلب را آغاز می‌کنیم:

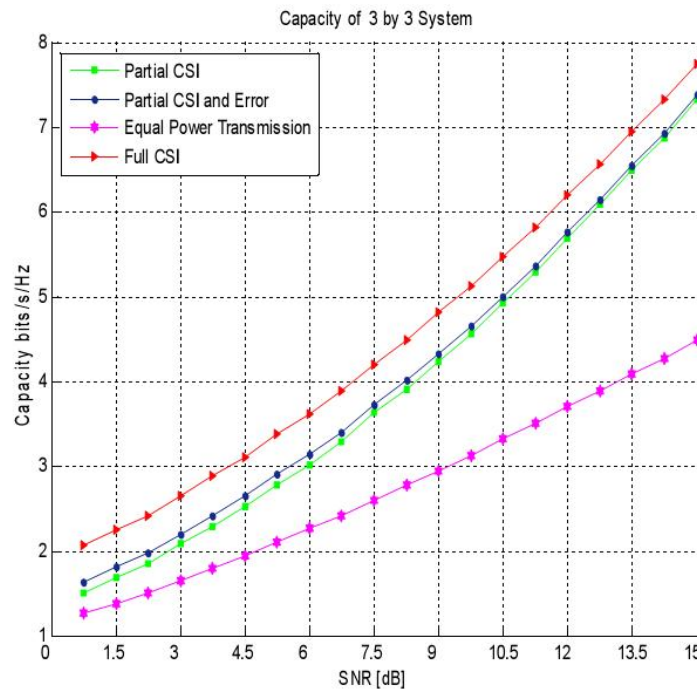
$$C = \frac{1}{\ln 2} \text{trace} \left\{ E \left[\ln \left(I + \frac{1}{\sigma^2} R_x H^H H \right) \right] \right\} \quad (۶)$$

که در آن R_x ماتریس همبستگی سیگنال ارسالی، σ^2 توان مولفه‌های نویز دریافتی و I ماتریس واحد می‌باشد.

با تعیین شدن ظرفیت در دو وضعیت معلوم بودن کامل CSI (رابطه‌ی (۱)) و در اختیار داشتن خطای آن با (رابطه‌ی (۵))، در این جا می‌تواند مقایسه‌ای بین این دو صورت گیرد. برای این منظور ظرفیت یک سیستم MIMO که دارای ۳ آنتن در فرستنده و ۳ آنتن در گیرنده می‌باشد، در چهار حالت مختلف در شکل ۳ مورد بررسی قرار گرفته است (برای دریافت جزئیات مربوط به این چهار حالت به مرجع ۳ مراجعه کنید):

- داشتن قسمتی از اطلاعات کانال در فرستنده (Partial CSI)
- داشتن قسمتی از اطلاعات کانال در فرستنده با وجود خطا (Partial CSI and Error)
- ارسال از فرستنده با تخصیص توان یکسان به هر یک از زیر کانال‌ها (Equal Power Transmission)
- داشتن اطلاعات کامل کانال در فرستنده (Full CSI)

مشاهده می‌شود که ظرفیت سیستم در $\text{SNR}=15 \text{ dB}$ با داشتن اطلاعات کانال در فرستنده به جهت تخصیص بهینه توان بین زیر کانال‌های SISO (منظور زیر کانال‌های بهینه در انتقال اطلاعات می‌باشد) با استفاده از الگوریتم واترپورینگ در حدود ۲ برابر ظرفیت سیستم بدون وجود CSI در گیرنده و استفاده از ارسال با توان یکسان بر روی زیر کانال‌های SISO می‌باشد. در نتیجه با



شکل ۳- ظرفیت سیستم MIMO با ۳ آنتن در حالات مختلف اطلاعات کانال [۳]

با توجه به مدل سیستم $(y = Hx + v)$ ، میزان اطلاعات متقابل بین سیگنال‌های ارسالی و دریافتی برابر است با [۴]:

$$I(x, y) = \log \det \left(I + HR_x H^H \right) \quad (12)$$

بهره برداری کامل از سیستم انتقال مستلزم ارسال و دریافت بهینه و آن مستلزم معلوم بودن کامل ماتریس H در نزد فرستنده می‌باشد.

برای بحث در مورد خطای کانال و به‌منظور در نظر داشتن بدترین شرایط، حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن راستای ماتریس خطا منطبق با راستای ماتریس کانال و در جهت مخالف آن (به‌منظور کاهش حداکثری بهره‌ی هر زیر کانال) باشد. با در نظر داشتن حد بالایی نرم خطا یعنی γ ، در این حالت، ماتریس خطا به‌صورت $\Delta H = \frac{\gamma}{\|H\|} H$ خواهد بود به این ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= H - \Delta H \\ &= H - \frac{\gamma}{\|H\|} H \\ &= \left(1 - \frac{\gamma}{\|H\|} \right) H \end{aligned} \quad (13)$$

در این حالت میزان بهره‌وری فرستنده از کانال با ضریب $1 - \frac{\gamma}{\|H\|}$ کاهش می‌یابد. بنا بر این میزان واقعی اطلاعات متقابل بین سیگنال‌های ارسالی و دریافتی برابر است با:

$$\begin{aligned} I(x, y) &= \log \det \left(I + \left(1 - \frac{\gamma}{\|H\|} \right) HR_x \left(1 - \frac{\gamma}{\|H\|} \right) H^H \right) \\ &= \log \det \left(I + \left(1 - \frac{\gamma}{\|H\|} \right)^2 HR_x H^H \right) \end{aligned} \quad (14)$$

تفاوت رابطه‌ی (۱۴) با رابطه‌ی (۱۲) ضریب زیر است که در نتیجه‌ی وجود خطا در تخمین کانال ارسال شده توسط گیرنده به فرستنده به‌وجود آمده است.

$$\left(1 - \frac{\gamma}{\|H\|} \right)^2 \quad (15)$$

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، ظرفیت سیستم‌های MIMO با در نظر داشتن فیدبک بین فرستنده و گیرنده و در حالت خطای کانال گوسی مورد بررسی قرار گرفت. با استدلالی منطقی نشان داده شد که در صورت ارسال مقادیر کوانتیزه شده‌ی کانال از فرستنده به گیرنده، یکنواخت فرض کردن خطای کانال معقول‌تر از گوسی فرض کردن آن است. با در نظر گرفتن این موضوع و با دنبال کردن روابط ابتدایی مربوط به ظرفیت، روابط مربوط به ظرفیت در این حالت تعیین شد. علاوه بر این با مرور روابط مربوط به ظرفیت نشان داده شد که ظرفیت کانال

در حالتی که \tilde{H} ، برآورد کانال در محل فرستنده با H مقدار دقیق کانال دارای اختلاف ΔH باشد، داریم:

$$H = \tilde{H} + \Delta H \quad (7)$$

پس از جای گذاری رابطه‌ی (۷) در رابطه‌ی (۶) داریم

$$C = \frac{1}{\ln 2} \text{tr} \left\{ E \left[\ln \left(I + \frac{1}{\sigma^2} R_x (\tilde{H} + \Delta H)^H (\tilde{H} + \Delta H) \right) \right] \right\} \quad (8)$$

به دلیل مقعر بودن تابع \ln و با توجه به نامساوی جنسن [۱۱]

$$\phi [E(x)] \geq E [\phi(x)] \quad (9)$$

که هر تابع مقعر دلخواه می‌باشد. حد بالایی به‌صورت زیر برای ظرفیت بدست می‌آید:

$$C \leq \frac{1}{\ln 2} \text{tr} \left\{ \ln \left(I + \frac{1}{\sigma^2} R_x (\tilde{H}^H \tilde{H} + \tilde{H}^H E(\Delta H) + E(\Delta H^H) \tilde{H} + E(\Delta H^H \Delta H)) \right) \right\} \quad (10)$$

در رابطه‌ی اخیر فرض می‌کنیم که درایه‌های ماتریس خطا، یعنی عناصر ماتریس ΔH ، دارای توزیع یکنواخت در بازه‌ی $[-\gamma, \gamma]$ می‌باشند. مقدار γ معادل حد بالای خطای کوانتیزاسیون در نظر گرفته شده در گیرنده و بنا بر این برابر با فاصله‌ی دو سطح متوالی کوانتیزاسیون می‌باشد.

واضح است که هر چقدر تعداد سطوح کوانتیزاسیون افزایش یابد، مقدار γ کاهش یافته و در عین حال نرخ ارسال دنباله‌ی اطلاعات کانال در مسیر فیدبک پاره‌ای افزایش می‌یابد. بدیهی است این موضوع پیچیدگی بیشتر سیستم را به دنبال خواهد داشت. به این ترتیب با توجه به اینکه خطای کانال دارای توزیع یکنواخت با میانگین صفر و واریانس $\frac{\gamma^2}{3}$ می‌باشد، به نامساوی جدید ارائه شده در رابطه‌ی (۱۱) برای حد بالای ظرفیت می‌رسیم:

$$C \leq \frac{1}{\ln 2} \ln \left\{ \det \left(I + \frac{1}{\sigma^2} R_x (\tilde{H}^H \tilde{H} + \frac{\gamma^2}{3} I) \right) \right\} \quad (11)$$

آنچه در رابطه‌ی (۱۱) آورده شده در واقع برآوردی آماری از حد بالایی ظرفیت می‌باشد. با مقایسه‌ی رابطه‌ی ۱۱ و رابطه‌ی می‌توان مشاهده کرد که ساختار هر دو رابطه یکسان بوده و تنها تفاوت در میزان واریانس خطای کانال می‌باشد.

به این ترتیب در تمام فعالیت‌های تحقیقاتی صورت گرفته توسط محققان، که در آن‌ها ظرفیت توسط رابطه‌ی (۵) و با فرض گوسی بودن خطا، بیان شده، کفایت σ_e^2 را با $\frac{\gamma^2}{3}$ جای‌گزین کنیم تا نتایج با فرض یکنواخت بودن کانال بدست آید.

اکنون تلاش می‌کنیم میزان ظرفیت را در بدترین شرایط و با در نظر گرفتن حد بالایی خطای کانال، یعنی γ تعیین کنیم.

- [10] V. Tarokh, N. Seshadri, and A. R. Calderbank; **"Space-time codes for high data rate wireless communications: performance criterion and code construction"**, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 44, pp. 744-765, Mar. 1998.
- [11] Athanasios Papulis and S. Unnikrishna Pillai; **"Probability, random variables and stochastic process"**, McGraw-Hill Science/Engineering/Math; 4 edition 2001.
- با وجود دایورسیتی در گیرنده بیشتر بوده و با استفاده از فیدبک و ارسال اطلاعات کانال به فرستنده حتی با وجود محدودیت‌های فیدبک و وجود خطا به ظرفیت بالاتری دست پیدا می‌کنیم. انتخاب وقتی شیوهی کوانتیزاسیون برای صرفه‌جویی در ارسال اطلاعات ارسالی از مسیر فیدبک و تأثیر آن بر ظرفیت، تعیین کدینگ بهینه یا شبه بهینه با در نظر داشتن خطای یکنواخت و تأثیر ارسال بخشی از اطلاعات کانال (زیر کانال‌های دارای بهره‌ی بالاتر) بر روی ظرفیت با در نظر داشتن خطای یکنواخت، به‌عنوان پیشنهادهایی برای ادامه‌ی کار، مطرح می‌شود.

۸- پی‌نوشت‌ها

- ¹- Channel State Information (CSI)
²- Water pouring
³- Single-Input Multiple-Output (SIMO)
⁴- Multiple-Input Single-Output (MISO)

۷- مراجع

- [1] G. Tsoulos; **"MIMO System Technology for Wireless Communications"**, CRC Press by Taylor & Francis Group, 2006.
- [2] D.S. Shiu, J. Foschini, J. Gans, and J.M Kahn; **"Fading correlation and its effect on the capacity of multi element antenna system"**, IEEE Transactions on Communications, 48, 502, 2000.
- [3] S. I. A. Ahmed, and K. K. Wong; **"On the MIMO capacity with imperfect CSI"**, London Communications Symposium, UCL London, UK, September 2007.
- [4] Paulraj, R. Nabar, and D. Gore; **"Introduction to Space Time Wireless Communications"**, Cambridge University Press, Chap. 4. 2003.
- [5] G.J. Foschini and M.J. Gans; **"On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas"**, Wireless Personal Communications, vol. 6, pp. 311-335, 1998.
- [6] E. Telatar; **"Capacity of multi-antenna Gaussian channels"**, European Transactions on Telecommunications, vol. 10, no. 6, Nov/Dec, pp. 585-595, 1999.
- [7] S. M. Alamouti; **"A simple transmit diversity technique for wireless communications"**, IEEE Journal Selected. Areas in Communications, vol. 16, no. 8, Oct, pp. 1451-1458, 1998.
- [8] J. G. Proakis; **"Digital Communications"**, 4th Edition, McGraw Hill Inc.
- [9] T. S. Rappaport; **"Wireless Communications: Principles and Practice"**, Eaglehood Cliffs, NJ: Printice Hall 1996