

## طراحی کنترل کننده مقاوم برای سیستم‌های چندمتغیره آشفته‌تکین

فاطمه جمشیدی<sup>۱</sup>، مهدی قاسم‌مقدم<sup>۲</sup>

۱- دانشجوی دکتری، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات فارس، Jamshidi1429@yahoo.com  
 ۲- دانشجوی دکتری، رشته برق کنترل دانشگاه تربیت مدرس، mehdi.ghasemmoghadam@gmail.com

### چکیده

در این مقاله کنترل مقاوم سیستم‌های چندمتغیره آشفته تکین بررسی می‌گردد. در حالت کلی برای بررسی کنترل مقاوم یک سیستم، دو حالت خطای مدل‌سازی جمعی و ضربی در نظر گرفته می‌شود که در این مقاله تنها حالت خطای مدل‌سازی جمعی در نظر گرفته شده است و براساس کران بالای خطای مدل‌سازی و معیار نایکوئیست و بهبود عملکرد سیستم رابطه‌ای جهت تعیین کنترل کننده مقاوم بدست می‌آید. برای سیستم‌های آشفته تکین، سیستم را به دو زیر سیستم تند و کند تجزیه کرده و کنترل کننده مقاوم را براساس سیستم کاهش یافته طراحی می‌کنیم. نحوه بدست آوردن کران جدید برای پایدارسازی سیستم و بهبود عملکرد در جهت کاهش حساسیت و انتشار نویز در این مقاله ارائه شده است.

### واژه‌های کلیدی

پایداری مقاوم، خطای مدل‌سازی، سیستم‌های آشفته تکین، سیستم‌های چندمتغیره، کنترل مقاوم.

### ۱- مقدمه

اهداف کنترلی مورد نظر را فراهم کند امری ضروری به نظر می‌رسد. با توجه به این‌که طراحی کنترل کننده براساس مدل سیستم صورت می‌گیرد و همواره امکان وجود اختلاف بین مدل سیستم و سیستم واقعی وجود دارد، بنابراین سعی می‌گردد این اختلاف‌ها به روش‌های مختلفی در مدل بکار برده شده اعمال گردد که از معروفترین آنها می‌توان خطای مدل‌سازی جمعی را نام برد. هدف از طراحی کنترل کننده مقاوم، طراحی کنترل کننده‌ای می‌باشد که پس از طراحی و اعمال آن به سیستم واقعی (با وجود اختلاف بین مدل و سیستم واقعی) سیستم کلی همچنان پایدار باقی بماند و نیز عملکرد سیستم در جهت کاهش حساسیت و انتشار نویز بهره یابد. کاری که در این مقاله صورت گرفته است، طراحی کنترل کننده مقاوم برای سیستم‌های چندمتغیره آشفته تکین با استفاده از خواص چنین سیستم‌هایی می‌باشد [۱، ۲، ۳، ۴ و ۵].

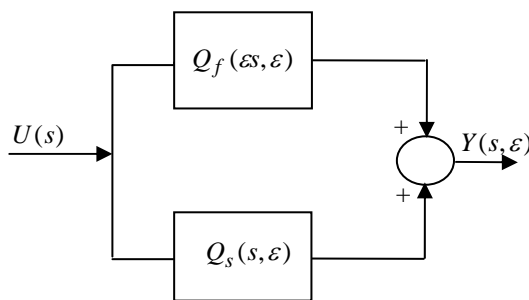
مسئله مدل‌سازی سیستم‌ها همواره از مهم‌ترین مباحث فراروی مهندسی کنترل بوده است. از یک سو مهندس کنترل مایل است که مدل بدست آمده حتی‌الامکان ساده باشد تا امکان طراحی کنترل کننده ساده‌تری را فراهم کند و از سوی دیگر باید مراقب باشد که ساده‌سازی بیش از حد مدل مورد بحث باعث غیرواقعی شدن آن نگردد. ساده‌سازی مدل از مدت‌ها پیش در بین مهندسان کنترل رایج بوده و حتی قبل از اینکه مسئله ساده‌سازی به صورت تحلیلی مطرح شود با صرف‌نظر کردن از پارامترهای کوچک، از قبیل ثابت زمانی، جرم، ظرفیت و امثال آنها باعث کاهش مرتبه سیستم می‌شدند. البته باید در نظر داشت که طراحی براساس یک مدل ساده شده همواره قابل قبول نبوده و ممکن است معیارهای مورد نظر ما را برآورده نسازد. لذا استفاده از روش‌های ساده‌سازی که امکان تحقق

به طوری که  $H$  و  $L$  از روابط زیر قابل محاسبه می‌باشند:

$$\begin{cases} A_{21} - A_{22}L + \varepsilon LA_{11} - \varepsilon LA_{12}L = 0 \\ \varepsilon(A_{11} - A_{12}L)H - H(A_{22} + \varepsilon LA_{12}) + A_{12} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

با تبدیل لاپلاس گرفتن از معادلات (۱)، تابع انتقال کل سیستم  $Q(s, \varepsilon)$  از ورودی  $U(s)$  به خروجی  $Y(s, \varepsilon)$  را می‌توان به صورت مجموع دو تابع انتقال کند و سریع به صورت زیر نوشت:

$$Y(s, \varepsilon) = Q(s, \varepsilon)U(s) = [Q_s(s, \varepsilon) + Q_f(\varepsilon s, \varepsilon)]U(s) \quad (4)$$



شکل ۱- تفکیک سیستم به دو زیر سیستم

$$Q(s) = Q_s(s, \varepsilon) + Q_f(\varepsilon s, \varepsilon) \quad (5)$$

### ۳- تعریف مساله

در این مقاله سعی گردیده است نحوه تعیین کنترل کننده پایدار ساز مقاوم برای سیستم‌های چندمتغیره آشفته تکین مورد بررسی قرار گیرد. انگیزه این مطالعه، ساده‌تر شدن محاسبات به میزان کاهش مرتبه سیستم (سیستم کند) می‌باشد. بنابراین در این حالت محاسبات ساده‌تر گردیده و فقط کران جدید در این حالت باید محاسبه گردد، سپس روابطی برای بهبود عملکرد سیستم بدست می‌آوریم.

### ۳-۱- طراحی کنترل مقاوم در حالت خطای مدل سازی

#### جمع

در این حالت فرض می‌کنیم که بتوانیم سیستم واقعی را به صورت  $Q(s) + \Delta Q(s)$  مدل نماییم. یک تابع پایدار نامشخص می‌باشد. شکل (۲) بلوک دیاگرامی که شامل خطای مدل سازی جمع می‌باشد، را نمایش می‌دهد.

### ۲- معرفی سیستم‌های آشفته تکین

روش‌های ساده‌سازی سیستم که از آنها تحت عنوان کلی مدل سازی تقریبی یاد می‌شود به دو گروه کلی تقسیم بندی می‌شوند:

۱- روش‌های حل عددی

۲- روش‌های مجانبی

در روش‌های حل عددی معادله دینامیکی سیستم را توسط روش‌های عددی حل نموده و کنترل کننده را طراحی می‌نماییم.

روش‌های مدل سازی مجانبی مبتنی بر بدست آوردن یک مدل تقریبی از سیستم اصلی تحت شرایطی خاص می‌باشند. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش مدل سازی آشفته تکین اشاره کرد. کار انجام شده در این مقاله، بر روی این روش می‌باشد [۸-۵].

در این روش سیستم به دو مدل مختلف به نام‌های مدل کاهش مرتبه یافته (مدل کند) و مدل لایه مرزی (مدل تند) تجزیه می‌شود. از مدل اول برای بررسی سیستم هنگامی که به حالت ماندگار رسیده است استفاده می‌شود ولی در بررسی حالات گذرای سیستم، از مدل کامل سیستم (مجموع دو مدل فوق‌الذکر) استفاده می‌شود.

از آنجا که در بسیاری از موارد، بررسی رفتار حالت ماندگار سیستم مورد نظر می‌باشد لذا پس از اطمینان از پایداری سیستم لایه مرزی، طراحی کنترل کننده را براساس مدل کاهش مرتبه یافته انجام می‌دهیم. طبیعی است که رفتار سیستم اصلی و سیستم کاهش مرتبه یافته آن در حالت گذرا یکسان نخواهد بود ولی می‌توان انتظار داشت که پس از عبور از حالت گذرا و رسیدن به حالت ماندگار دو سیستم رفتار مشابهی را از خود بروز دهند.

مدل فضای حالت یک سیستم آشفته تکین خطی و مستقل از زمان به صورت زیر قابل نمایش می‌باشد.

$$\begin{cases} \dot{X} = A_{11}X + A_{12}Z + B_1U \\ \varepsilon \dot{Z} = A_{21}X + A_{22}Z + B_2U \\ Y = C_1X + C_2Z \end{cases} \quad (1)$$

سیستم (۱) را می‌توان به صورت زیر و مطابق شکل (۱) به دو سیستم سریع و کند تفکیک نمود:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}L & 0 \\ 0 & A_{22} + \varepsilon LA_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \\ \quad + \begin{bmatrix} B_1 - HB_2 - \varepsilon HLB_1 \\ B_2 + \varepsilon LB_1 \end{bmatrix} U \end{cases} \quad (2)$$

$$Y = (C_1 - C_2L \dots C_2 + \varepsilon(C_1 - C_2L)H) \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

از رابطه (۱۲) داشتیم که:

$$\| [I - FQ(s)]^{-1} \| \| F \| < \frac{1}{d} \quad (14)$$

پس:

$$\| I - FQ(s) \| \| F^{-1} \| > \bar{d} \quad (15)$$

اما در سیستم‌های آشفته تکین  $Q = Q_f + Q_s$ ، پس:

$$\| I - F(Q_s + Q_f) \| \| F^{-1} \| > \bar{d} \quad (16)$$

حال اگر  $F$  را به گونه‌ای بیابیم که رابطه (۱۶) برقرار باشد، در آن صورت پایداری مقاوم را برای حالت خطای مدل‌سازی جمعی خواهیم داشت [۱]. اما هدف استفاده از  $Q_s$  به جای  $Q$  در طراحی کنترلر  $F$  برای پایداری مقاوم می‌باشد. برای این منظور قضیه یک زیر نحوه استفاده از  $Q_s$  به جای  $Q$  را بیان می‌نماید.

### قضیه یک

در یک سیستم آشفته تکین که در آن  $Q = Q_f + Q_s$  می‌باشد، رابطه  $\| [I - FQ]^{-1} \| \| F \| < \frac{1}{d}$  برقرار خواهد بود، اگر و فقط اگر رابطه  $\| [I - FQ_s]^{-1} \| \| F \| < \frac{1}{d + d'}$  برقرار باشد، به طوری که  $d' = \| Q_f \|$ .

### اثبات

با توجه به فرضیات قضیه داریم:

$$\| [I - FQ]^{-1} \| \| F \| < \frac{1}{d} \Rightarrow \| [I - FQ] \| \| F^{-1} \| > \bar{d}$$

از طرفی  $Q = Q_f + Q_s$  پس:

$$\| I - F(Q_s + Q_f) \| \| F^{-1} \| > \bar{d}$$

و با توجه به رابطه (۱۳) داریم:

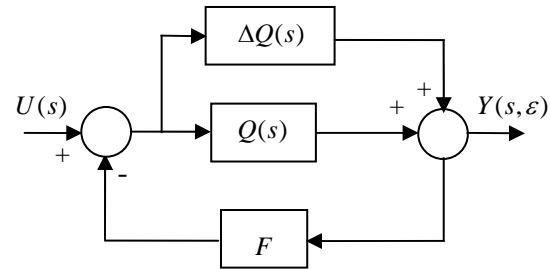
$$\| I - FQ_s \| \| F^{-1} \| > d$$

و از طرفی

$$\begin{aligned} \| I - FQ_s \| \| F^{-1} \| &= \| (I - FQ_s - FQ_f + FQ_f) \| \| F^{-1} \| \\ &= \| (I - FQ + FQ_f) \| \| F^{-1} \| \leq \| (I - FQ) \| \| F^{-1} \| + \| Q_f \| \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\| I - FQ \| \| F^{-1} \| > d - \| Q_f \|$$



شکل ۲- بلوک دیاگرام سیستم شامل خطای مدل‌سازی جمعی

$F = \text{diag}\{f_1, \dots, f_m\}$  ماتریس فیدبک قطری به صورت می‌باشد، که در آن  $f_i \in \mathbb{R}$  و  $i = 1, \dots, m$  ماتریس‌های تابع تبدیل حلقه بازو حلقه بسته منحرف شده به ترتیب عبارتند از:

$$Q'(s) = Q(s) + \Delta Q(s) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} H(s) &= [I + (Q(s) + \Delta Q(s))F]^{-1} [Q(s) + \Delta Q(s)] \\ &= R'(s)^{-1} Q'(s) \end{aligned} \quad (7)$$

ماتریس  $\Delta Q(s)$ ، یک ماتریس پایدار با نرم کراندار فرض شده است [۴]، به عبارت دیگر:

$$\sup_{s \in D} \| \Delta Q(s) \| \leq \bar{d} < \infty \quad (8)$$

بر اساس معیار نایکوئیست برای اینکه سیستم حلقه بسته پایدار باشد، باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$\| \Delta Q(s) \| \| R^{-1}(s) \| < 1 \quad (9)$$

با توجه به رابطه (۸) داریم که:

$$\| R^{-1}(s) \| < \frac{1}{d} \quad (10)$$

یعنی:

$$\| [F^{-1} - Q(s)^{-1}] \| < \frac{1}{d} \quad (11)$$

پس:

$$\| [I - FQ(s)]^{-1} F \| < \frac{1}{d} \quad (12)$$

حال می‌خواهیم در رابطه فوق به جای تابع انتقال  $Q(s)$  از تابع انتقال کاهش مرتبه یافته  $Q_s(s)$  استفاده کنیم [۳ - ۱]. باید برای این کار، کران جدید  $d$  را بدست آورده و به کمک رابطه زیر  $F$  را تعیین کنیم:

$$\| [I - FQ_s(s)]^{-1} F \| < \frac{1}{d} \quad (13)$$

$$w_1(s) = 0.141(1+s) \quad (19)$$

و باند بالا برای تابع تبدیل حلقه بسته به وسیله بهره زیر تخمین زده می‌شود:

$$w_2(s) = \frac{3.536(1+0.1s)}{s} \quad (20)$$

قیود فوق در نرم‌های زیر وجود دارند، به عبارتی:

$$\|w_1^{-1}S\|_{\infty} \leq 1 \quad (21)$$

$$\|w_2^{-1}T\|_{\infty} \leq 1 \quad (22)$$

انتخاب‌های  $w_1$  و  $w_2$  در بعضی مواقع دلخواه هستند و در بسیاری موارد یکتا نیستند.

حال با توجه به روابط (۲۱) و (۲۲) قضا یا و لم‌های زیر را جهت بهبود عملکرد سیستم برای کاهش حساسیت و انتشار نویز بیان می‌کنیم.

### لم یک

$$\|Q+R\| \leq \|Q\| + \|R\| \quad (23)$$

$$\|Q.R\| \leq \|Q\| \|R\| \quad (24)$$

### قضیه دو

شرط کاهش حساسیت برای یک سیستم چندمتغیره در حالت خطای مدل‌سازی جمعی آن است که کنترلر  $F$  در روابط زیر صدق کند:

$$\|Iw_1\| + \|QFw_1\| + \|\Delta Q\| \|Fw_1\| \geq 1 \quad (25)$$

که در آن  $w_1$  یک تابع وزن دلخواه می‌باشد و داریم:

$$\sup_{s \in D} \|\Delta Q\| \leq \bar{d} < \infty$$

### اثبات

با توجه به این که  $S = [I + (Q + \Delta Q)F]^{-1}$ ، رابطه (۲۱) به رابطه زیر تبدیل خواهد شد:

$$\|w_1^{-1}[I + (Q + \Delta Q)F]^{-1}\| \leq 1$$

که معادل است با:

$$\|[I + (Q + \Delta Q)F]w_1\|^{-1} \leq 1$$

که با معکوس کردن رابطه فوق داریم:

و داریم  $d' = \|Q_f\|$ ، حال اگر  $d = \bar{d} + d'$  خواهیم داشت:

$$\|(I - FQ_s)^{-1}\| \|F\| > \frac{1}{\bar{d} + d'}$$

### اثبات عکس قضیه

طبق فرض قضیه داریم:

$$\|(I - FQ_s)^{-1}\| \|F\| > \frac{1}{\bar{d} + d'}$$

در نتیجه:

$$\|I - FQ_s\| \|F^{-1}\| > \bar{d} + d' = \bar{d} + \|Q_f\|$$

پس

$$\|I - FQ_s\| \|F^{-1}\| - \|Q_f\| > \bar{d}$$

و داریم:

$$\|I - FQ_s\| \|F^{-1}\| - \|Q_f\| \geq \|I - FQ_s\| \|F^{-1}\| - \|FQ_f\| \|F^{-1}\| \\ = \|I - FQ_s\| \|F^{-1}\| - \|Q_f\| > \bar{d}$$

بنابراین

$$\|(I - FQ_s)F^{-1} - FQ_fF^{-1}\| > \bar{d}$$

پس

$$\|(I - FQ_s + FQ_f)F^{-1}\| = \|(I - FQ)\| \|F^{-1}\| > \bar{d}$$

و در نتیجه:

$$\|[I - FQ]^{-1}\| \|F\| < \frac{1}{\bar{d}}$$

اکنون که روابطی برای بدست آوردن پایداری یک سیستم چندمتغیره آشفته تکین در حالت خطای مدلسازی جمعی بدست آوردیم، نوبت به آن رسیده است تا روابطی برای بهبود عملکرد سیستم برای کاهش حساسیت و انتشار نویز بدست آوریم.

روابط بهبود عملکرد سیستم را می‌توان با توابع وزنی مناسب و نرم‌های اپراتوری مطرح کرد. به عنوان مثال فرض کنید که داریم:

$$\bar{\sigma}(S(j\omega)) \leq 0.2, \quad \omega \leq 1 \quad (17)$$

$$\bar{\sigma}(T(j\omega)) \leq 0.1, \quad \omega \geq 10 \quad (18)$$

باند بالا برای حساسیت می‌تواند به وسیله بهره تابع تبدیل زیر تخمین زده شود:

بنابراین  $\| [I + (Q + \Delta Q)F] w_1 \| \geq 1$

که با توجه به رابطه (۲۳)  $\| Q + \Delta Q \| \leq \| Q \| + \bar{d}$

و در نتیجه

$$\| I w_1 \| + \| (Q + \Delta Q) F w_1 \| \geq 1$$

$$\| I w_1 \| + \| Q F w_1 \| + \| \Delta Q F w_1 \| \geq 1$$

اکنون با استفاده از رابطه (۲۴) داریم:

$$\| I w_1 \| + \| Q F w_1 \| + \| \Delta Q \| \| F w_1 \| \geq 1$$

و در نتیجه

$$\| I w_1 \| + \| Q_s F w_1 \| + \| \Delta Q \| \| F w_1 \| \geq 1$$

$$\| (Q + \Delta Q)^{-1} \| \leq \frac{1}{\bar{d} + \| Q \|}$$

حال باتوجه به نتایج حاصل شده داریم:

$$\| I w_2 \| + \| F^{-1} (Q + \Delta Q)^{-1} w_2 \|$$

$$= \| I w_2 \| + \| F^{-1} w_2 \| \| (Q + \Delta Q)^{-1} \| \geq 1$$

که در نتیجه داریم:

$$\| F^{-1} w_2 \| \geq (1 - \| I w_2 \|) (\bar{d} + \| Q \|)$$

$$\| F^{-1} w_2 \| \geq (1 - \| I w_2 \|) \cdot (\bar{d} + \| Q_s \|)$$

### قضیه سه

شرط کاهش نویز برای یک سیستم چندمتغیره در حالت خطای مدل سازی جمعی آن است که کنترلر  $F$  در روابط زیر صدق کند:

$$\| F^{-1} w_2 \| \geq (1 - \| I w_2 \|) \cdot (\bar{d} + \| Q \|) \quad (۲۶)$$

که در آن  $w_2$  یک تابع وزن دلخواه می باشد و داریم:

$$\sup_{s \in D} \| \Delta Q \| \leq \bar{d} < \infty$$

### اثبات

با توجه به این که  $T = I - S$  و با استفاده از رابطه (۲۲) داریم:

$$\| w_2^{-1} (I - [I + (Q + \Delta Q)F]^{-1}) \| \leq 1$$

پس

$$\| w_2^{-1} [I + [I + (Q + \Delta Q)F]^{-1}]^{-1} \| \leq 1$$

$$\| [I + ((Q + \Delta Q)F)^{-1}] w_2 \| \geq 1$$

و با استفاده از رابطه (۲۳)

$$\begin{aligned} \| [I + ((Q + \Delta Q)F)^{-1}] w_2 \| &\geq \| I w_2 \| + \| ((Q + \Delta Q)F)^{-1} w_2 \| \\ &= \| I w_2 \| + \| F^{-1} (Q + \Delta Q)^{-1} w_2 \| \geq 1 \end{aligned}$$

طبق فرض قضیه

$$\sup_{s \in D} \| \Delta Q \| \leq \bar{d} < \infty$$

$$\| Q \| + \| \Delta Q \| \leq \bar{d} + \| Q \|$$

پس

$$\| Q + \Delta Q \| \leq \| Q \| + \| \Delta Q \|$$

### ۴- شبیه سازی

سیستم آشفته تکین زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 & 0.1 \\ .1 & -8 & 0.05 & 0.1 \\ 0 & 0 & -15 & 0 \\ 0.01 & 0.003 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & .5 \\ .5 & 0 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & .02 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = 0.025$$

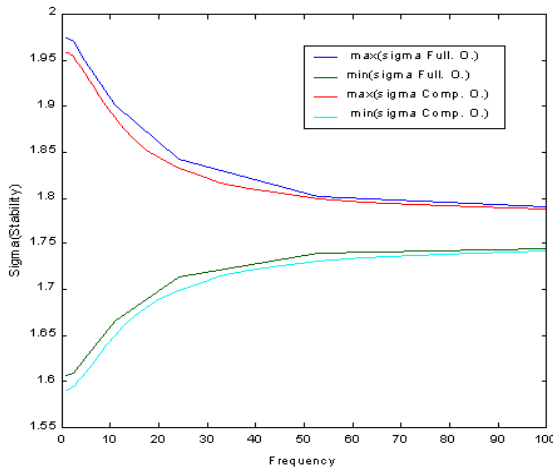
حال تابع انتقال سیستم را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$Q = C(sI - A)^{-1} B$$

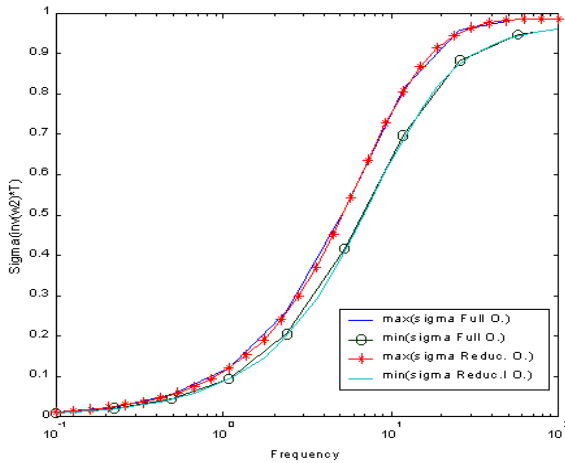
$$Q = \begin{bmatrix} Q(1,1) & Q(1,2) \\ Q(2,1) & Q(2,2) \end{bmatrix}$$

$$Q(1,1) = \frac{0.4s^3 + 246.8s^2 + 4114s + 17320}{(s + 600)(s + 40)(s + 9)(s + 8)}$$

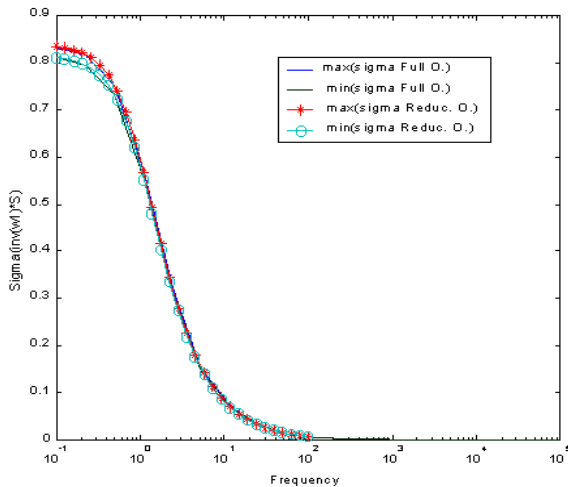
$$Q(1,2) = \frac{-1.137e - 13s^3 + 0.0024s^2 + 1.464s + 12.98}{(s + 600)(s + 40)(s + 9)(s + 8)}$$



شکل ۳-  $\text{Sigma}((\text{inv}(\mathbf{I}-\mathbf{F}*\mathbf{Q}))*\mathbf{F})$  برای سیستم مرتبه کامل و کاهش مرتبه یافته



شکل ۴-  $\text{Sigma}(\text{inv}(\mathbf{W}_1)*\mathbf{S})$  برای سیستم مرتبه کامل و کاهش مرتبه یافته



شکل ۵-  $\text{Sigma}(\text{inv}(\mathbf{W}_2)*\mathbf{T})$  برای سیستم مرتبه کامل و کاهش مرتبه یافته

$$Q(2,1) = \frac{s^3 + 650s^2 + 30340s + 201600}{(s + 600)(s + 40)(s + 9)(s + 8)}$$

$$Q(2,2) = \frac{5.684e - 13s^3 + 7.276e - 11s^2 + 0.012s + 7.212}{(s + 600)(s + 40)(s + 9)(s + 8)}$$

$$Q = Q_f + Q_s$$

$$Q_f = \begin{bmatrix} Q_f(1,1) & Q_f(1,2) \\ Q_f(2,1) & Q_f(2,2) \end{bmatrix}$$

$$Q_s = \begin{bmatrix} Q_s(1,1) & Q_s(1,2) \\ Q_s(2,1) & Q_s(2,2) \end{bmatrix}$$

$$Q_f(1,1) = \frac{+4114s + 239.8}{(s + 600)(s + 40)}$$

$$Q_s(1,1) = \frac{0.0002794s + 0.002248}{(s + 9)(s + 8)}$$

$$Q_f(1,2) = \frac{-7.512e - 5s - 0.04508}{(s + 600)(s + 40)}$$

$$Q_s(1,2) = \frac{7.512e - 5s + 0.0006761}{(s + 9)(s + 8)}$$

$$Q_f(2,1) = \frac{-0.06447s - 38.68}{(s + 600)(s + 40)}$$

$$Q_s(2,1) = \frac{1.064s + 8.515}{(s + 9)(s + 8)}$$

$$Q_f(2,2) = \frac{1.212e - 5s + 0.00727}{(s + 600)(s + 40)}$$

$$Q_s(2,2) = \frac{-1.212e - 5s + 0.0002787}{(s + 9)(s + 8)}$$

قطب‌های سیستم عبارتند از:  $-۹$ ،  $-۴۰$ ،  $-۶۰$  و  $-۸$  که به ترتیب دو قطب اول مربوط به زیر سیستم تند و دو قطب دوم مربوط به زیر سیستم کند می‌باشد.

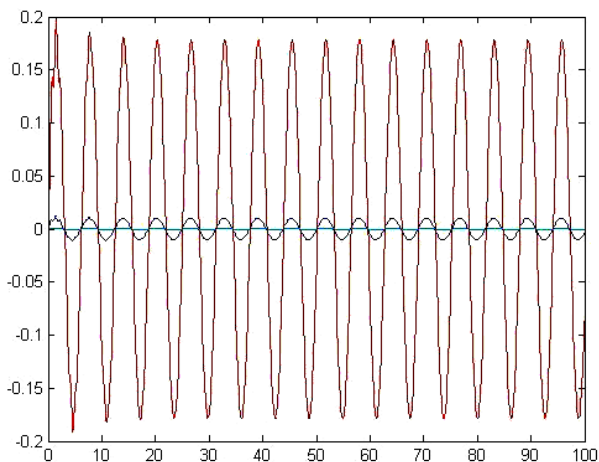
در حالت خطای مدل‌سازی جمع‌ی خواهیم داشت:

$$d' = \|Q_f\| = 0.0101$$

اگر در این حالت فرض نماییم  $\sup_{s \in D} \| \Delta Q(s) \| < \frac{1}{2}$  در آن صورت خواهیم داشت:  $\bar{d} = 0.5$ .

حال اگر بخواهیم از  $Q_s$  استفاده نماییم، باید از کران جدید  $d' + \bar{d} = 0.5101$  استفاده نماییم. روابط کاهش حساسیت و انتشار نویز را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\bar{\sigma}(S(j\omega)) \leq 0.2, \quad \omega \leq 1$$



شکل ۷- پاسخ سیستم مرتبه کامل به ورودی سینوسی

### ۵- نتیجه گیری

با توجه به قضایای ارائه شده و شبیه‌سازی‌های صورت گرفته، مشاهده نمودیم که محاسبات با روش ارائه شده در این مقاله بسیار کاهش یافته و تعیین کنترل کننده پایدار ساز را بسیار راحت تر می‌سازد. اما در قبال این کاهش محاسبات، باید کران‌های جدید در هر حالت بر اساس قضایای ارائه شده محاسبه گردند. نگرش‌های دیگری که در ادامه این کار می‌تواند وجود داشته باشد، طراحی کنترل کننده‌هایی در حضور کارآیی‌ها می‌باشد.

### ۶- مراجع

- [1] B. Porter, A.T. Shentan; "Singular Perturbation Analysis of the Transfer Function Matrices of a Class of Multivariable Linear System", Int. j. control, Vol. 21, pp. 655 - 660, 1975.
- [2] D.W Luse, H.K. Autom; "Frequency Domain Results Systems with Slow and Fast Dynamic", IEEE, 1985.
- [3] D.W. Luse; "Basic Results for Multiple Frequency Scale System", Proc, American Control Conference, San Diego, CA, pp. 1366 - 1367, 1984.
- [4] M. Green, D. J.N.Limeer, "Linear Robust Control", Prentice Hall, 1996.
- [5] P.V. Kokotovic, H.K. Khalil, J. O'Reilly; "Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design, Academic Press, 1989.
- [6] H. K. Khalil; "Nonlinear Systems", 2<sup>nd</sup>. Ed. Prentice Hall Inc. New Jersey, 1996.

$$\bar{\sigma}(T(j\omega)) \leq 0.1, \quad \omega \geq 10$$

برای برآورده ساختن شروط فوق توابع وزنی  $w_1$  و  $w_2$  را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$w_1(s) = 0.141(1+s)$$

$$w_2(s) = \frac{3.536(1+0.1s)}{s}$$

قیود فوق را می‌توان به صورت نرم‌های زیر در نظر گرفت:

$$\|w_1^{-1}S\|_{\infty} \leq 1$$

$$\|w_2^{-1}T\|_{\infty} \leq 1$$

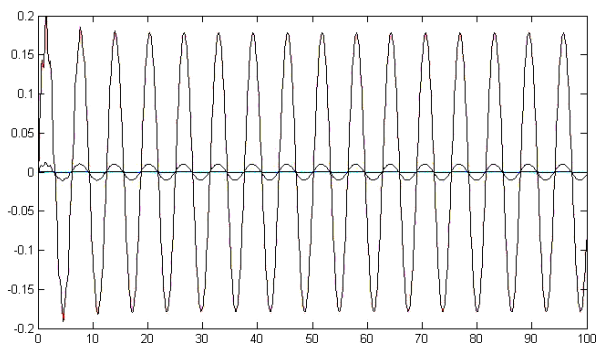
به صورت سعی و خطا  $F$  را به شکل زیر بدست می‌آوریم:

$$F = \begin{bmatrix} 1.75 & 0 \\ 0 & 1.75 \end{bmatrix}$$

برای اثبات درستی کنترلر طراحی شده، منحنی‌های عبارات مربوط به حدود پایداری و کاهش حساسیت و انتشار نویز در شکل‌های (۳)، (۴) و (۵) رسم شده‌اند.

با توجه به این شکل‌ها مشخص است که تفاوت چندانی بین پاسخ فرکانسی سیستم مرتبه کامل و کاهش مرتبه یافته وجود نداشته و لذا تقریب استفاده شده مناسب می‌باشد.

پاسخ سیستم به ورودی سینوسی در شکل‌های (۶) و (۷) رسم شده‌اند. می‌بینیم که هر دو پاسخ تقریباً یکسان بوده و خطا بسیار ناچیز می‌باشد.



شکل ۶- پاسخ سیستم کاهش مرتبه یافته به ورودی سینوسی

- [7] P.V. Kokotovic; “**Applications of Singular Perturbations Techniques to Control Systems**”, SIAM Review, Vol. 26, No.4, October 1984.
- [8] V.R. Saksena, J. O'Reilly, P.V. Kokotovic; “**Singular Perturbations and Time-Scale Methods in Control Theory: Survey 1976 - 1983**”, Automatica, Vol. 20, No. 3, March 1984.