

پایداری مقاوم، کنترلگر فیدبک H_2 و H_∞ مقاوم با استفاده از نامساوی‌های ماتریسی خطی

محمد رضا داوودی^۱، فاطمه جمشیدی^۲

۱- دانشجوی دکتری مهندسی برق، دانشگاه تربیت مدرس، davoodi@ieee.org

۲- دانشجوی دکتری مهندسی برق، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات فارس، Jamshidi1429@yahoo.com

چکیده

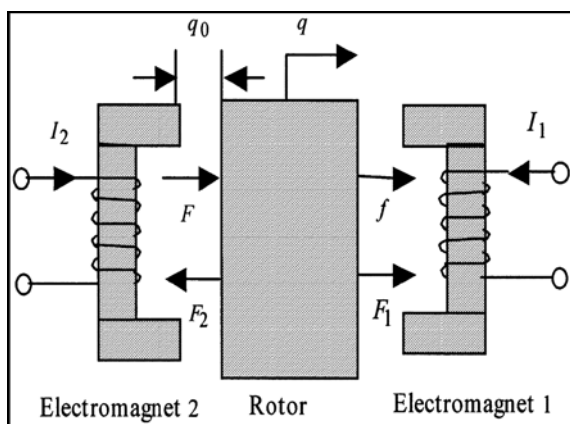
این مقاله یک پروسه طراحی برای پایداری مقاوم، کنترل H_2 و H_∞ مقاوم با استفاده از فیدبک خروجی دینامیکی برای دسته‌ای از سیستم‌های خطی نامعین پیشنهاد می‌کند. عدم قطعیت‌ها از نوع نرم محدود هستند. تحقق فضای حالت کنترلگرها از حل چندین نامساوی ماتریسی خطی بدست می‌آید. پروسه پیشنهادی به یک سیستم بلبرینگ مغناطیسی فعال اعمال شده و نتایج شبیه‌سازی موثر بودن روش را نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی

بلبرینگ مغناطیسی، پایداری مقاوم، کنترل فیدبک خروجی، کنترل H_2 و H_∞ مقاوم، نامساوی‌های ماتریسی خطی.

۱- مقدمه

گرفته شده‌اند [۲]. برای حذف نیاز به فیدبک سرعت، یک کنترلگر فیدبک خروجی پیشنهاد شده است که تنها از سیگنال موقعیت روتور استفاده می‌نماید.



شکل ۱- بلبرینگ مغناطیسی پایه

بلبرینگ مغناطیسی فعال^۱ مجموعه‌ای از الکترومگنت‌ها است که برای تعلیق یک شی از طریق کنترل فیدبک بکار می‌رود. مزیت اصلی AMB، در مقایسه با بلبرینگ‌های هیدرواستاتیکی و مکانیکی عبارت است از: کاهش اصطکاک که به عملکرد موثر و مفید در سرعت‌های خیلی بالا منجر می‌شود، حذف روغنکاری و سیستم‌های تغذیه مربوطه، قابلیت کارکردن در خلا و دمای بالا و توانایی کنترل فعال بلبرینگ. به دلیل همین مزایا، AMBها در بسیاری از کاربردهای صنعتی همچون ذخیره انرژی چرخ پرواز توربین‌های سرعت بالا و کمپرسور و ... کاربرد دارند [۱].

یک سیستم AMB پایه شامل یک الکترومگنت روی هر طرف یک روتور سخت مطابق شکل (۱)، در این مقاله مورد نظر است. طراحی کنترلگر براساس مدلی است که با یک سیستم مرتبه دوم بازه‌ای خطی با اغتشاش نامعلوم توصیف گردیده است. عدم قطعیت پارامتری در سیستم به خوبی با بازه‌های پارامتری معلوم توصیف شده است، در حالی که دینامیک‌های مدل نشده در اغتشاش در نظر

$$H_{cl} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F_{cl} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix}$$

$$E_{1cl} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ E_2 D_c C_2 & E_2 C_c \end{bmatrix} \quad E_{2cl} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_2 D_c D_{21} \end{bmatrix}$$

لم ۱: فرض كنيد سيستم

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) \\ z(t) = Cx(t) + Dw(t) \end{cases} \quad (4)$$

پايدار مجانبی باشد و $T_s = C(sI - A)^{-1}B + D$ بيانگر تابع تبديل آن است. اگر $D = 0$ آنگاه عبارات زير معادل هستند:

$$\|T\|_2 \leq \gamma \quad (a)$$

$$X = X^T > 0 \quad \text{و} \quad Z \quad \text{وجود دارد به گونه‌ای که} \quad (b)$$

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & XB \\ B^T X & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \begin{bmatrix} X & C^T \\ C & Z \end{bmatrix} > 0 \quad (5)$$

$$\text{trace}(Z) < \gamma$$

لم ۲ (لم حقیقی محدود): برای سیستم (۴)، عملکرد H_∞ با $\gamma > 0$ معادل وجود $X > 0$ است که در رابطه زير صدق کند:

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T & B & XC^T \\ B^T & -\gamma I & D^T \\ CX & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

لم ۳ (مکمل شور): نامساوی خطی $\begin{bmatrix} Q(X) & S(X) \\ S^T(X) & R(X) \end{bmatrix} > 0$ که $Q = Q^T$ ، $R = R^T > 0$ و S تابع نما خطی از X است معادل است با:

$$\begin{cases} Q(X) - S(X)R^{-1}(X)S^T(X) > 0 \\ R(X) > 0 \end{cases}$$

لم ۴: Σ, Ω, Γ ماتریس‌های با بعد مناسب هستند که Ω یک ماتریس متقارن است آنگاه برای هر ماتریس F که $FF^T \leq I$ ، $\Omega + \Gamma F \Sigma + (\Gamma F \Sigma)^{-1} \leq 0$ معادل $\Omega + \varepsilon \Gamma \Gamma^T + \varepsilon^{-1} \Sigma^T \Sigma \leq 0$ وجود داشته باشد [۶]. اگر و تنها اگر ثابت $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد [۶].

۳- نتایج اصلی

۳-۱- پایداري مقاوم با استفاده از فيدبك خروجی

قضیه زير یک LMI برای طراحی کنترلگر فيدبك خروجی که پایداري مقاوم را تأمین می‌کند، پیشنهاد می‌نماید. قضیه ۱: مشابه [۳] متغیرهای کنترلگر به صورت زير تغییر داده می‌شود:

نامساوی‌های ماتریسی خطی^۲، تکنیک طراحی و فرمولاسیون قوی برای انواع مسائل کنترل خطی هستند. از آنجا که حل LMI یک مساله بهینه‌یابی محدب است، چنین فرمولاسیونی یک ابزار عددی قابل ردیابی برای مسایلی است که حل تحلیلی ندارند. از این رو بیان مسایل طراحی کنترل به صورت LMI را می‌توان حل عملی آنها در نظر گرفت.

در این مقاله، پایداري مقاوم، عملکردهای H_2 و H_∞ با استفاده از کنترل فیدبک خروجی برای دسته‌ای از سیستم‌های خطی نامعین بررسی گردیده است. شرایط مساله به صورت تعدادی LMI بیان شده است. در آخر، این مسایل به یک سیستم بلبرینگ مغناطیسی فعال اعمال گردیده است.

در بخش دوم بیان ریاضی سیستم، لم‌ها و قضیه‌های مورد نیاز برای پایداري مقاوم، عملکردهای H_2 و H_∞ بیان شده‌اند. کاربرد روش‌های طراحی در سیستم بلبرینگ مغناطیسی و نتایج شبیه‌سازی در بخش ۳ و به دنبال آن نتیجه‌گیری در بخش ۴ آمده است.

۲- بیان ریاضی سیستم، پیش‌نیازها و قضایا

این مقاله بر روی دسته‌ای از سیستم‌های خطی نامعین متمرکز است که با معادلات فضای حالت به فرم

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + \Delta A(t))x(t) + B_1 w(t) + (B_2 + \Delta B_2(t))u(t) \\ z(t) = C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) = C_2 x(t) + D_{21} w(t) \end{cases} \quad (1)$$

قابل توصیف است. x ، متغیر حالت، w ، بردار ورودی اغتشاش، u ، بردار ورودی کنترل، z ، بردار خروجی کنترل شده، y ، بردار اندازه‌گیری، $A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{11}, D_{12}, D_{21}$ ، ماتریس‌های ثابت با بعد مناسب و $\Delta A(t), \Delta B_2(t)$ ، بیانگر عدم قطعیت‌های پارامتری نرم محدود به فرم $\Delta A = H_1 F_1 E_1, \Delta B_2 = H_2 F_2 E_2$ هستند. که H_1, E_1, H_2, E_2 ، ماتریس‌های ثابت حقیقی معلوم و F_1, F_2 ، ماتریس‌های نامعلوم هستند که عضو مجموعه $\Omega = \{F(t) | F^T(t)F(t) \leq 1, F(t) \text{ is lebesgue measurable}\}$ می‌باشند.

با اعمال کنترلگر فیدبک خروجی به فرم

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u(t) = C_c x_c(t) + D_c y(t) \end{cases} \quad (2)$$

به سیستم (۱) سیستم حلقه بسته به شکل زير درمی‌آید:

$$\begin{cases} \dot{X}_{cl} = (A_{cl} + \Delta A_{cl}(t))X_{cl}(t) + (B_{cl} + \Delta B_{cl}(t))w(t) \\ z(t) = C_{cl} X_{cl}(t) + D_{cl} w(t) \end{cases} \quad (3)$$

که عدم قطعیت‌های حلقه بسته $\Delta A_{cl}(t), \Delta B_{cl}(t)$ عبارتند از $\Delta A_{cl} = H_{cl} F_{cl} E_{1cl}, \Delta B_{cl} = H_{cl} F_{cl} E_{2cl}$ که

غیرمحدب است. از این رو X و X^{-1} به صورت

$$X = \begin{bmatrix} R & M \\ M^T & U \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & V \end{bmatrix}$$

افرازبندی شده‌اند. می‌توان اثبات کرد که X در تساوی

$$\Pi_1 = X\Pi_2, \Pi_1 = \begin{bmatrix} R & I \\ M^T & 0 \end{bmatrix}, \Pi_2 = \begin{bmatrix} I & S \\ 0 & N^T \end{bmatrix} \quad (15)$$

صدق می‌کند. اگر نامساوی $X > 0$ از چپ در Π_2^T و از راست در Π_2 ضرب شود، نامساوی (۹) بدست می‌آید. به‌طور مشابه، شرط LMI (۱۰)، از ضرب رابطه (۱۳) از چپ در $\text{diag}(\Pi_2^T, I, I)$ و از راست در $\text{diag}(\Pi_2, I, I)$ بدست می‌آید.

۳-۲- کنترل مقاوم H_∞ با استفاده از فیدبک خروجی

قضیه زیر یک LMI برای طراحی کنترلگر فیدبک خروجی که عملکرد H_∞ را تأمین می‌کند، پیشنهاد می‌نماید.

قضیه ۲: برای سیستم (۱)، کنترلگر فیدبک خروجی به فرم (۲) وجود دارد به‌گونه‌ای که سیستم حلقه بسته (۳) برای هر عدم قطعیت مجاز، عملکرد H_∞ با $\gamma > 0$ را تضمین می‌نماید اگر سیستم LMIهای زیر حل‌پذیر باشد.

اسکالر $\varepsilon > 0$ را به‌گونه‌ای بیابید که $S = S^T \in R^{n \times n}$ ، $R = R^T \in R^{n \times n}$ و $\hat{A}_c, \hat{B}_c, \hat{C}_c, \hat{D}_c$

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0 \quad (16)$$

و

$$\begin{bmatrix} \psi_A + \psi_A^T & \psi_B & \psi_c^T & \psi_E^T & \varepsilon\psi_H \\ * & -\gamma I & D_{cl}^T & E_{2cl}^T & 0 \\ * & * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

$$\psi_A = \begin{bmatrix} AR + B_2\hat{C}_c & A + B_2\hat{D}_cC_2 \\ \hat{A}_c & SA + \hat{B}_cC_2 \end{bmatrix} \quad \text{که}$$

$$\psi_E = \begin{bmatrix} E_1R & E_1 \\ E_2\hat{C}_c & E_2\hat{D}_cC_2 \end{bmatrix}, \psi_B = \begin{bmatrix} B_1 + B_2\hat{D}_cD_{21} \\ SB_1 + \hat{B}_cD_{21} \end{bmatrix}$$

$$\psi_H = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ SH_1 & SH_2 \end{bmatrix}, \psi_c = [C_1R + D_{12}C_c \quad C_1 + D_{12}\hat{D}_cC_2]$$

که $\hat{A}_c, \hat{B}_c, \hat{C}_c, \hat{D}_c$ در (۷) تعریف شده‌اند.

اثبات: با در نظر گرفتن (۶) برای سیستم حلقه بسته (۳)، نامساوی زیر بدست آمده است:

$$\hat{A}_c = SAP + NB_cC_2R + SB_2C_cM^T + NA_cM^T + SB_2D_cC_2R$$

$$\hat{B}_c = NB_c + SB_2D_c \quad (7)$$

$$\hat{C}_c = C_cM^T + D_cC_2R$$

$$\hat{D}_c = D_c$$

که M و N معکوس‌پذیر هستند و باید به‌گونه‌ای انتخاب شوند که

$$MN^T = I - RS \quad (8)$$

برای سیستم (۱)، کنترلگر فیدبک خروجی به فرم (۲) وجود دارد به‌گونه‌ای که سیستم حلقه بسته (۳) برای هر عدم قطعیت مجاز، پایدار حلقه بسته را تضمین می‌نماید اگر سیستم LMIهای زیر حل‌پذیر باشد.

اسکالر $\varepsilon > 0$ را به‌گونه‌ای بیابید که $S = S^T \in R^{n \times n}$ ، $R = R^T \in R^{n \times n}$ و $\hat{A}_c, \hat{B}_c, \hat{C}_c, \hat{D}_c$

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0 \quad (9)$$

و

$$\begin{bmatrix} \psi_A + \psi_A^T & \psi_E^T & \varepsilon\psi_H \\ * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

$$\psi_A = \begin{bmatrix} AB + B_2\hat{C}_c & A + B_2\hat{D}_cC_2 \\ \hat{A}_c & SA + \hat{B}_cC_2 \end{bmatrix} \quad \text{که}$$

$$\psi_H = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ SH_1 & SH_2 \end{bmatrix}, \psi_E = \begin{bmatrix} E_1R & E_1 \\ E_2\hat{C}_c & E_2\hat{D}_cC_2 \end{bmatrix}$$

ماتریس حالت کنترلگر A_c, B_c, C_c, D_c را می‌توان از رابطه (۷) بدست آورد. توجه داشته باشید که * برای نشان دادن ترم‌های متقارن بکار رفته است.

اثبات: سیستم (۳) برای اغتشاشات Δ پایدار خوانده می‌شود، اگر ماتریس $X = X^T > 0$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که

$$(A_{cl} + \Delta A_{cl}(t))^T X + X(A_{cl} + \Delta A_{cl}(t)) < 0 \quad (11)$$

با جدا کردن جزء نامعین نامساوی (۱۱) و استفاده از لم ۴، نامساوی زیر بدست می‌آید:

$$A_{cl}X + XA_{cl}^T + \varepsilon H_{cl}H_{cl}^T + \varepsilon^{-1}XE_{1cl}^TE_{1cl}X < 0 \quad (12)$$

با استفاده از مکمل شور برای نامساوی (۱۲)، داریم:

$$\begin{bmatrix} A_{cl}X + XA_{cl}^T & XE_{1cl}^T & \varepsilon H_{cl} \\ * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

نامساوی (۱۳) به‌دلیل ضرب شدن ماتریس‌های A_{cl} و X در هم،

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \\ \psi_c & Z \end{bmatrix} > 0 \quad (22)$$

و

$$\begin{bmatrix} \psi_A + \psi_A^T & \psi_B & \psi_E^T & \varepsilon \psi_H \\ * & -I & E_{2cl}^T & 0 \\ * & * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (23)$$

که $\psi_A, \psi_B, \psi_C, \psi_E, \psi_H$ در (۱۸) و $\hat{A}_c, \hat{B}_c, \hat{C}_c, \hat{D}_c$ در (۷) تعریف شده‌اند.

اثبات: با در نظر گرفتن رابطه (۵) برای سیستم حلقه بسته (۳)، نامساوی‌های زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{bmatrix} HermX(A_{cl} + \Delta A_{cl}) & X(B + \Delta B_{cl}) \\ * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} X & C_{cl}^T \\ C_{cl} & Z \end{bmatrix} > 0, \text{trace}(Z) < \gamma$$

با جداکردن جزء نامعین نامساوی (۲۴) و با استفاده از لم ۴، نامساوی زیر بدست می‌آید

$$\begin{bmatrix} A_{cl}X + XA_{cl}^T + \varepsilon XH_{cl}H_{cl}^T X + \varepsilon^{-1}E_{1cl}^T E_{1cl} & * \\ B_{cl}^T X + \varepsilon^{-1}E_{2cl}^T E_{1cl} & \varepsilon^{-1}E_{2cl}^T E_{2cl} - I \end{bmatrix} < 0 \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} X & C_{cl}^T \\ C_{cl} & Z \end{bmatrix} > 0, \text{trace}(Z) < \gamma$$

با استفاده از مکمل شور برای نامساوی (۲۵) نامساوی زیر بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} A_{cl}X + XA_{cl}^T & XB_{cl} & E_{1cl}^T & \varepsilon XH_{cl} \\ * & -I & E_{2cl}^T & 0 \\ * & * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} X & C_{cl}^T \\ C_{cl} & Z \end{bmatrix} > 0, \text{trace}(Z) < \gamma$$

نامساوی (۲۶) به دلیل ضرب شدن ماتریس‌های A_{cl} و X در هم، غیرمحدب است. از این رو X و X^{-1} مشابه (۱۴) افزایش یافته‌اند و Π_1 و Π_2 مشابه (۱۵) تعریف شده‌اند. اگر نامساوی $\begin{bmatrix} X & C_{cl}^T \\ C_{cl} & Z \end{bmatrix} > 0$ از چپ در (Π_1, I) و از راست در $(\Pi_1, I)^T$ ضرب شود، نامساوی (۲۲) بدست می‌آید. به طور مشابه، شرط LMI (۲۳)، از ضرب رابطه (۲۶) از چپ در $\text{diag}(\Pi_2^T, I, I, I)$ و از راست در $\text{diag}(\Pi_2, I, I, I)$ بدست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} Herm(A_{cl} + \Delta A_{cl})X & (B_{cl} + \Delta B_{cl}) & XC_{cl}^T \\ * & -\gamma I & D_{cl}^T \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

که $Herm$ بیانگر ترانهاده هرمیتی است. با جداکردن جزء نامعین نامساوی (۱۹) و استفاده از لم ۴، نامساوی زیر بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} A_{cl}X + XA_{cl}^T + \varepsilon H_{cl}H_{cl}^T + \varepsilon^{-1}XE_{1cl}^T E_{1cl}X & * & * \\ B_{cl}^T + \varepsilon^{-1}E_{2cl}^T E_{1cl}X & -\gamma I + \varepsilon^{-1}E_{2cl}^T E_{2cl} & * \\ C_{cl}X & D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

با استفاده از مکمل شور برای نامساوی (۱۹) و استفاده از لم ۴، نامساوی زیر بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} A_{cl}X + XA_{cl}^T & B_{cl} & XC_{cl}^T & XE_{1cl}^T & \varepsilon H_{cl} \\ * & -\gamma I & D_{cl}^T & E_{2cl}^T & 0 \\ * & * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

نامساوی (۲۱) به دلیل ضرب شدن ماتریس‌های A_{cl} و X در هم، غیرمحدب است. از این رو X و X^{-1} مشابه (۱۴) افزایش یافته‌اند و Π_1 و Π_2 مشابه (۱۵) تعریف شده‌اند. اگر نامساوی $X > 0$ از چپ در Π_2^T و از راست در Π_2 ضرب شود، نامساوی (۱۶) بدست می‌آید. به طور مشابه، شرط LMI (۱۷)، از ضرب رابطه (۲۱) از چپ در $\text{diag}(\Pi_2^T, I, I, I, I)$ و از راست در $\text{diag}(\Pi_2, I, I, I, I)$ بدست می‌آید.

نکته: از آنجاکه ε و ψ_H در رابطه (۱۷) در هم ضرب شده‌اند، این نامساوی غیرمحدب است. اما از آنجا که ε یک اسکالر است این نامساوی را به راحتی به روش جستجوی خط روی ε می‌توان حل کرد. یک اسکالر مثبت دلخواه در نظر گرفته می‌شود آنگاه چنانچه مسأله حل پذیر نباشد، این اسکالر به گونه‌ای تغییر داده می‌شود که مسأله حل پذیر شود.

۳-۳- کنترل H_2 مقاوم با استفاده از فیدبک خروجی

قضیه زیر یک LMI برای طراحی کنترلرگر فیدبک خروجی که عملکرد H_2 را تأمین می‌کند، پیشنهاد می‌نماید.

قضیه ۳: برای سیستم (۱)، کنترلرگر فیدبک خروجی به فرم (۲) وجود دارد به گونه‌ای که سیستم حلقه بسته (۳) برای هر عدم قطعیت مجاز، عملکرد H_2 را تضمین می‌نماید. اگر سیستم LMI‌های زیر حل پذیر باشد. $R = R^T \in R^{n \times n}$ ، $S = S^T \in R^{n \times n}$ ، $\hat{A}_c, \hat{B}_c, \hat{C}_c, \hat{D}_c$ و اسکالر $\varepsilon > 0$ و Z را به گونه‌ای بیابید که

۴- اعمال روش پیشنهادی به بلبرینگ مغناطیسی

۴-۱- بیان مساله

مدل ریاضی دینامیکی AMB نشان داده شده در شکل (۱) را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$m\ddot{q} = -\frac{\mu_0 AN^2}{4} \left[\left(\frac{I_1}{q_0 - q} \right)^2 - \left(\frac{I_2}{q_0 - q} \right)^2 \right] + f + F \quad (27)$$

که

m	جرم روتور (kg)
q	جابجایی موقعیت روتور (m)
q_0	فاصله هوایی نامی (m)
μ_0	نفوذپذیری خلا (H/m)
A	مساحت کلی قطب صفحه هر الکترومگنت (m)
N	تعداد دورهای هر سیم پیچ الکترومگنت
I_1, I_2	جریان سیم پیچ الکترومگنتها (A)
f	اغتشاش مجهول (N)
F	نیروهای معلومی که به روتور اعمال می شوند (N)

اگر (۱) در نقطه تعادل $I_1 = I_2 = I_0, q = 0$ خطی شود و با ساختار کنترل نشان داده شده در شکل (۲) الحاق گردد، مدل خطی شده به صورت سیستم مرتبه دوم زیر بدست می آید:

$$\ddot{q} - w^2 q = \sigma u + \frac{1}{m}(f + F) \quad (28)$$

که

$$w = \frac{\mu_0 AN^2 I_0^2}{mq_0^3}, \sigma = -\frac{\mu_0 AN^2 I_0}{mq_0^2} \quad (29)$$

به دلیل رقیق نبودن اندازه گیری برخی از پارامترهای فیزیکی و تغییر شرایط محیطی، پارامترهای سیستم w و σ عموماً نامعین هستند. البته، بدون از دست دادن عمومیت. می توان فرض کرد که مقادیر آنها در بازه های معلومی صدق می کنند

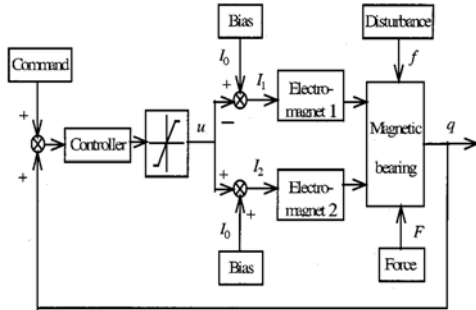
$w_1, w_2, \sigma_1, \sigma_2$ که $w \in [w_1, w_2], \sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$ اسکالرهایی معلومی هستند که در $w_2 \geq w_1 > 0, \sigma_1 \leq \sigma_2 < 0$ صدق می کنند. به منظور اجتناب از نیاز به فیدبک سرعت و نیز تأمین پایداری مطلوب، در این مقاله کنترل سیستم (۲۸) با استفاده از کنترلر فیدبک خروجی پیشنهاد شده است. فرض کنید تنها جابجایی موقعیت روتور اندازه گیری می شود و $y = q, x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$

سیستم (۲۸) می تواند به فرم فضای حالت معادل

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + \Delta A)x + B_1(f + F) + (B_2 + \Delta B_2(t))u \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$$(A + \Delta A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{0}{w} & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, (B_2 + \Delta B_2(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$C = [1 \quad 0]$$



شکل ۲- دیاگرام سیستم کنترل

$$(A + \Delta A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{0}{w} & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, (B_2 + \Delta B_2(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$C = [1 \quad 0]$$

تبدیل شود که $\bar{w} = w^2$ و پارامترهای w و σ در $\bar{w}_2 \geq \bar{w} \geq \bar{w}_1 > 0$ و $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2 < 0$ صادقند. با تعریف مقادیر نامی $\bar{w}_0 = \frac{\bar{w}_1 + \bar{w}_2}{2}, \sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ و خطاهای مقیاس شده به صورت $\Delta_1 = \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_2 - \sigma_0}, \Delta_2 = \frac{\bar{w} - \bar{w}_0}{\bar{w}_2 - \bar{w}_0}$ می توان نوشت: $\sigma = \sigma_0 + W_1 \Delta_1$ که $W_1 = \sigma_2 - \sigma_0$ و $\bar{w} = \bar{w}_0 + W_2 \Delta_2$ که $W_2 = \bar{w}_2 - \bar{w}_0$ با دسته عدم قطعیت های $\Delta_i = \{\Delta_i \in R \mid -1 < \Delta_i < 1\}$ توجه کنید که پارامترهای اصلی $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2], w \in [w_1, w_2]$ با استفاده از مقادیر نامی σ_0, \bar{w}_0 و W_1, W_2 به عنوان وزن ها، به پارامترهای جدید Δ_1, Δ_2 تبدیل شده اند.

بنابراین

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{0}{\bar{w}_0} & 0 \end{bmatrix}, \Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ W_1 \Delta_1 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta B_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ W_2 \Delta_2 \end{bmatrix}, C_1 = C_2 = [1 \quad 0] = D_{11} = D_{12} = D_{21} = 0$$

و ماتریس های عدم قطعیت عبارتند از

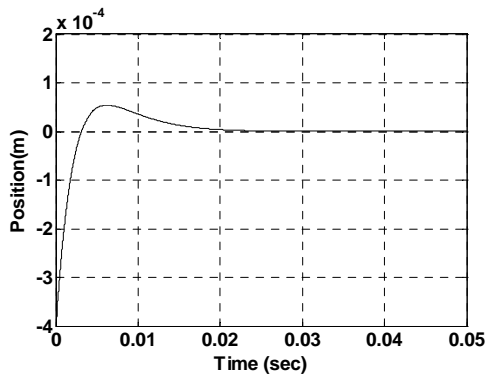
$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ W_1 & 0 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ W_2 & 0 \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نترلر فیدبک خروجی عمومی برای سیستم (۳۰) را می توان به فرم زیر نوشت:

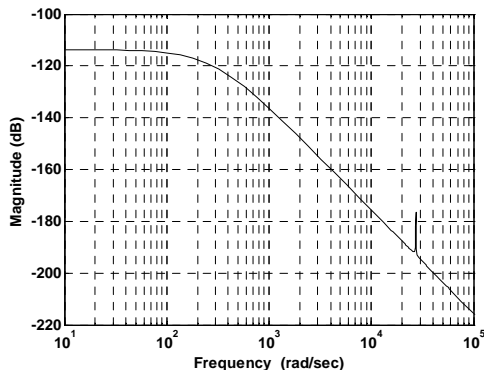
$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u(t) = C_c x_c(t) + D_c y(t) + K_f F \end{cases} \quad (31)$$

۵- نتیجه گیری

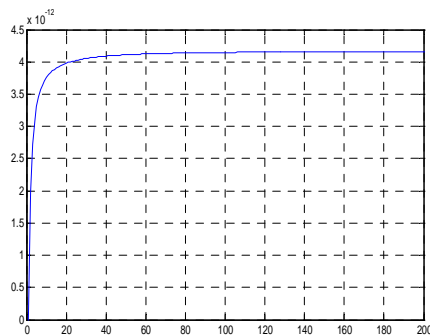
در این مقاله، پایداری مقاوم، عملکرد H_2 و H_∞ با استفاده از کنترل فیدبک خروجی برای دسته‌ای از سیستم‌های خطی نامعین بررسی شده است. شرایط مساله به صورت تعدادی نامساوی ماتریسی خطی بیان گردیده است. سپس این مسایل برای یک سیستم بلبرینگ مغناطیسی فعال حل شده‌اند تا یک چرخ پرواز ذخیره انرژی سرعت بالا را حمایت کند. نتایج شبیه‌سازی، مؤثر بودن این طراحی را نشان می‌دهد.



شکل ۳- پاسخ سیستم حلقه بسته با استفاده از کنترلگر H_∞ مقاوم



شکل ۴- دیاگرام دامنه بود با استفاده از کنترلگر H_∞ مقاوم



شکل ۵- نسبت انرژی خروجی تنظیم شده به انرژی اغتشاش سیستم

که A_c, B_c, C_c, D_c ضرایب اسکالر کنترلگر هستند که باید طراحی شوند و ترم K_f برای جبران تأثیر نیروی F معرفی شده و به صورت زیر تعریف می‌شود [۲]:

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u(t) = C_c x_c(t) + D_c y(t) + K_f F \end{cases} \quad (32)$$

که A_c, B_c, C_c, D_c ضرایب اسکالر کنترلگر هستند که باید طراحی شوند و ترم K_f برای جبران تأثیر نیروی F معرفی شده و به صورت زیر تعریف می‌شود [۲]:

$$K_f = -\frac{1}{m\sigma} = -\frac{q_0^2}{\mu_0 AN^2 I_0} \quad (33)$$

۴-۲- نتایج شبیه‌سازی

مقادیر w و مقادیر مربوط به مرزهای بازه $w_i, \sigma_i, i=1, 2$ در جدول (۱) آمده است. پارامترهای نامی بلبرینگ در جدول (۲) آورده شده است. پاسخ سیستم حلقه بسته با کنترلگر H_∞ مقاوم در شکل (۳) و دیاگرام دامنه بود آن در شکل (۴) آمده است. شکل (۵) نسبت انرژی خروجی تنظیم شده به انرژی اغتشاش این سیستم را نشان می‌دهد. پاسخ سیستم حلقه بسته با کنترلگر H_2 مقاوم در شکل (۶) و دیاگرام دامنه بود آن در شکل (۷) نشان داده شده است. مقدار γ بدست آمده از کنترلگر H_∞ بدون عدم قطعیت 0.16 و مقدار γ بدست آمده از کنترلگر H_2 بدون عدم قطعیت 2.1538×10^{-6} است. مقایسه نتایج نشان می‌دهد که کنترلگر H_∞ نسبت به سایر کنترلگرها مقاوم‌تر است اما پاسخ‌گذرای کنترلگر H_2 بهتر است.

جدول ۱- پارامترهای w و σ و حدود بالا و پایین آنها

پارامتر	مقدار
w	۳۵۹/۶
w_1	-۱۰/۳۵
w_2	۲۴۰
σ	۳۹۰
σ_1	-۲۲
σ_2	-۴/۵

جدول ۲- پارامترهای مغناطیسی

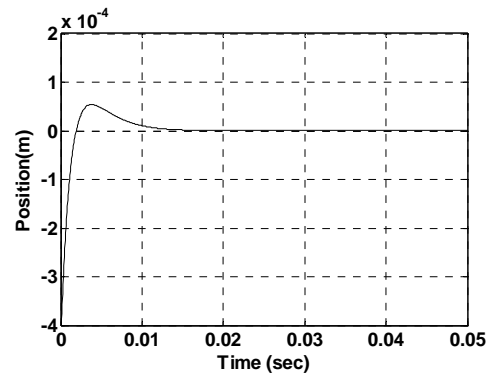
پارامتر	مقدار
m	6kg
A	$4 \times 2.1610^{-4} m^2$
N	40
I_0	5A
q_0	0.4mm

Synthesis for a Class of Uncertain Fuzzy Systems”, Proc. Fourth International Conference on Mechanical Learning and Cybernetics. August 2005.

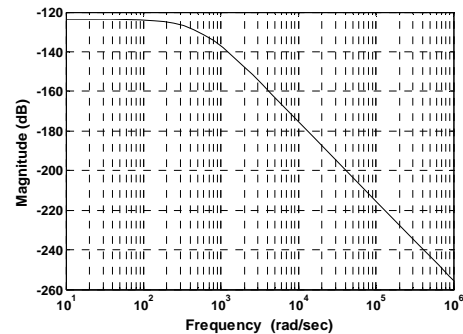
- [7] J. Lofberg. Y. ALMIP; A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In Proceedings of the CACSD Conference, Taipei, Taiwan, 2004. Available from <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>

۱۴- پی نوشتها

- 1- Active Magnetic Bearing (AMB)
- 2- Linear Matrix Inequal



شکل ۶- پاسخ سیستم حلقه بسته با استفاده از کنترلگر H_2 مقاوم



شکل ۷- دیاگرام دامنه بود با استفاده از کنترلگر H_2 مقاوم

۱۳- مراجع

- [1] M. Dussaux; “The Industrial Applications of Active Magnetic Bearing Technology”, Proc. 2nd Int. Symp. Magnetic Bearings, July 12 – 14, pp. 33 – 38, 1990.
- [2] G.R. Duan, Z.Y. Wu, C. Bingham, D. Howe; “Robust Magnetic Bearing Control Using Stabilizing Dynamical Compensators”, Proc. 1999 Int. Elect. Machines Drives Conference, Seattle, WA, pp. 493 – 495, May 9 – 12, 1999.
- [3] C. Scherer, P. Gahinet, M. Chilali; “Multi-Objective Output Feedback Control via LMI Optimization”, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 42, No. 7, pp. 896 - 911, July 1997.
- [4] M. Chilali, P. Gahinet; “ H_∞ Design with Pole Placement Constraints: an LMI Approach”, IEEE Transacion on Automatic Control, Vol. 41, No. 3, pp. 358 – 367, March 1996.
- [5] P. Gahinet, A. Nemirovski, A.J. Laub, M. Chilali; **The LMI Control Toolbox: The Mathworks Inc.**, The Mathworks Inc., 1995.
- [6] L. He, G. Duan; “Multi-objective Control